数理解析研究所講究録
418巻 1981年 57-70

パワースペクトラムとWalsh-スペクトラムの比較。

大分大．工学部　永井　武昭

[I]. 序.　時系列 $\{X(t),\ t=0,1,2,\ldots,N-1\}$, $N=2^m$ に対して，Walsh-関数系 $\{W(t,\omega),\ 0\leq\omega\leq 1\}$ $t=0,1,2,\ldots$ を核とするスペクトル解析を行う。　時系列 $\{X(t),\ t=0,1,\ldots,N-1\}$ の中の系列数番号 ω のWalsh成分，すなわち $W(t,\omega)$-成分の強さを表す Walsh-スペクトラム $g(\omega)$ は時系列がDyadic定常であるとき，そのWalshスペクトル表現 $X(t)=\int_0^1 W(t,\omega)\,dZ(\omega)$ を用いて，ごく自然な形で

$$g(\omega)\,d\omega = E\{dZ(\omega)^2\}$$

によって定義される。(Nagai (1976), Morettin (1974)).

このWalsh-スペクトラム $g(\omega)$ の推定問題は定常過程のパワースペクトラム $f(\lambda)$, $-\pi\leq\lambda\leq\pi$ の推定問題と全く同じ手法を用いて行われる。　すなわち，時系列データの有限Walsh-変換から構成したWalsh-ピリオドグラム $I(\omega)$ を平滑化した推定量，また標本Dyadic自己相関関数を用いた打切

り推定量，それと，有限次のDyadic自己回帰（DAR）モデルを当てはめてのParametricなWalsh-スペクトラムの推定量等が考えられる。 これらの推定量の計算方法，統計的な性質，平滑化の効果，DARモデル当てはめによるWalshスペクトラム推定値の計算アルゴリズム等について考察を行った。 特に興味のある場合として，パワースペクトラム $f(\lambda)$ をもつ定常時系列 $\{X(t),\ t=0,1,2\cdots\}$ に対し，そのWalshスペクトラム $g(\omega)$ の定義とその推定問題，そして $g(\omega)$ の信頼区間の構成等がある。 これらの考察と共に，$f(\lambda)$ と $g(\omega)$ との間の二，三の特徴的な関係について言及を行う。

［II］．Walsh-スペクトラム．（W-スペクトラム）．

平均がゼロで，有限な分散をもつ時系列 $\{X(t),\ t=0,1,2\cdots\}$ を考察する。 その自己共分散を $R(t,s)=E\{X(t)X(s)\}$ とする。 実数 t，s に対し，その二進加法を $t\oplus s$ で表す。

特に，すべての整数 $\tau\geqq 0$ に対して $R(t,s)=R(t\oplus\tau,\ s\oplus\tau)$ のとき $\{X(t),\ t=0,1,2\cdots\}$ をDyadic定常（D定常）であると云う。 このとき $R(t,s)$ は $t\oplus s$ のみの関数であるので $R(t,s)=R(t\oplus s)$ と表すこととする。 ここで考察するD-定常系列は常に $R(\tau)=\int_0^1 W(\tau,\omega)\,g(\omega)\,d\omega$ の形のスペクトル表現が可能であると仮定する。 ここに

$\{W(t,\omega),\ 0\leq\omega\leq 1\}\ t=0,1,2\cdots$ はWalsh関数系で±1のみの値をとり，$L_2(0,1)$ 上の完備直交系であり，また．$W(t,\omega)\cdot W(s,\omega)=W(t\oplus s,\omega)$，a.e が成立する。 $g(\omega)$，$0\leq\omega\leq 1$ は非負関数で，系列 $\{X(t),\ t=0,1,2\cdots\}$ の W-スペクトラムである。 特に白雑音系列 $\{\varepsilon(t),\ t=0,1,2\cdots\}$，$E\{\varepsilon(t)\}=0$，$Var(\varepsilon(t))=\sigma^2$，は D定常であり，その Wスペクトラムは $g(\omega)=\sigma^2$，$0\leq\omega\leq 1$ である。 また，系列 $\{X(t),\ t=0,1,2\cdots\}$ が

$$X(t)=\sum_{\ell=1}^{p}a(\ell)X(t\oplus\ell)+\varepsilon(t),\qquad a(p)\neq 0,$$

を満足するとき，これを p-次の Dyadic 自己回帰（DAR）系列であるという。 DAR-系列は常に D定常であり，

$$\varphi(\omega)=1-\sum_{\ell=1}^{p}a(\ell)W(\ell,\omega)\neq 0,\quad \text{a.e.}$$

であれば，その Wスペクトラムは

$$g(\omega)=\sigma^2/[\varphi(\omega)]^2$$

である。 また，この $X(t)$-系列は

$$X(t)=\sum_{j=0}^{M-1}b(\ell)\,\varepsilon(t\oplus\ell)$$

と表すことも出来る。 ここに，$M=2^{\delta}$，$2^{\delta-1}\leq p\leq M-1$ である。

時系列 $\{X(t),\ t=0,\pm 1,\pm 2\cdots\}$ が定常で，パワースペクトラム（Pスペクトラム）$f(\lambda)$，$-\pi\leq\lambda\leq\pi$ をもつものとする。 すなわち，自己共分散関数が次のスペクトル表現：

$$\rho(\tau) = \mathrm{Cov}(X(t), X(t+\tau)) = \int_0^\pi \cos \tau\lambda \, f^*(\lambda) d\lambda$$

をもつとする。　ここに $f^*(\lambda) = 2f(\lambda)$.

このとき,

$$A_r(\lambda, \omega) = \sum_{t=0}^{r-1} W(t, \omega) \cos t\lambda,$$

$$B_r(\lambda, \omega) = \sum_{t=0}^{r-1} W(t, \omega) \sin t\lambda$$

とし,

$$g(\omega) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_0^\pi [A_r^2(\lambda,\omega) + B_r^2(\lambda,\omega)] f^*(\lambda) d\lambda \quad \cdots (2, 1)$$

が存在するとき, $g(\omega)$ を定常時系列 $\{X(t), t=0, \pm1, \pm2 \cdots\}$ の Walsh－スペクトラムと定義する。

定常時系列データ $\{X(t), t=0, 1, 2, \dots, N-1\}$, $N=2^m$, を用いて、その Wスペクトラム $g(\omega)$ を推定するのであるが, これは $\mathcal{D}$定常系列においてその Wスペクトラムを推定する方式をそのまゝ援用すればよい。また, その推定量の統計的な性質も殆んど $\mathcal{D}$定常系列の場合と変らない。これらの点については次節で具体的に考察を行う。

[III]. W. スペクトラムの推定.　　$\{X(t), t=0, 1, 2 \dots N-1\}$, $N=2^m$, を観測された時系列データとする。いま, 系列数区間 $[0, 1]$ をN分割し, その分割中点を

$$\omega_j = (j+\tfrac{1}{2})/N\ , \quad j=0, 1, 2 \dots, N-1,$$

とする。　最初のN個の Walsh 関数 $W(t, \omega)$, $t=0, 1, 2, \dots, N-1$

の系列数 ω_j, $j=0,1,2\cdots N-1$ での値を元とする $N\times N$ 行列を $\mathbb{H}_N$ と表す。すなわち、

$$\mathbb{H}_N = \begin{Bmatrix} W(0,\omega_0), & W(0,\omega_1) \cdots & W(0,\omega_{N-1}) \\ W(1,\omega_0), & W(1,\omega_1) \cdots & W(1,\omega_{N-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ W(N-1,\omega_0), & W(N-1,\omega_1) \cdots & W(N-1,\omega_{N-1}) \end{Bmatrix}$$

とする。これは N 次の Hadamard 行列である。

まず最初に時系列データ $\{X(t),\ t=0,1,2\ldots N-1\}$ の有限 Walsh 変換（Hadamard 変換）：

$$D(j) = \sum_{t=0}^{N-1} X(t)\, W(t,\omega_j), \qquad j=0,1\ldots N-1$$

を計算する。これを用いて Walsh-ピリオドグラムを

$$I(j) = [D(j)]^2/N, \qquad j=0,1,\ldots N-1$$

で定義する。

Walsh 関数が Grenander 条件（E. J. Hannan (1970), p. 215）を満足するので定常系列のとき $\{D(j),\ j=0,1,2\ldots N-1\}$ の漸近正規性が成立する。また、非定常のときも適当な条件のもとで、$\{D(j),\ j=0,1\ldots N-1\}$ は $N\to\infty$ のとき、漸近的に独立で、平均値がゼロで分散が $Ng(\omega_j)$ の正規分布に近づく。従って、このとき $\{I(j)/g(\omega_j),\ j=0,1,2\ldots N-1\}$ は互に独立で、自由度1の χ^2 分布に漸近的に従う。従って、十分大きい N にたいして、

$$E\{I(j)\} \doteqdot g(\omega_j),$$
$$Var(I(j)) \doteqdot 2g(\omega_j)^2$$

が成立する。この事から Walshピリオドグラム $I(j)$ は W スペクトラム $g(\omega_j)$ の漸近的に不偏な推定量ではあるが，一致性をもたない事が解る。

次に，P スペクトラム $f(\lambda)$ をもつ定常な時系列 $\{X(t),\ t=0,1,2\ldots\}$ について考察する。　N が十分大きい時には，有限 Walsh 変換 $\{D(j),\ j=0,1,2\ldots N-1\}$ は漸近的に平均値がゼロで，分散共分散行列 $\Sigma = N\{V(j,k)\}$ をもつ，N-変量正規分布に従う。ただし，

$$V(j,k) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_0^{\pi}[A_N(\lambda,\omega_j)A_N(\lambda,\omega_k) + B_N(\lambda,\omega_j)B_N(\lambda,\omega_k)]f^*(\lambda)d\lambda$$

$$V(j,j) = g(\omega_j)$$

である。ここに $g(\omega)$ は (2,1) 式で定義された定常時系列の W スペクトラムである。したがって，十分大きい N にたいしては

$$E\{I(j)\} \fallingdotseq g(\omega_j)$$
$$Var(I(j)) \fallingdotseq 2g^2(\omega_j)$$

となり，W スペクトラム $g(\omega)$ の推定量として $I(j)$ は漸近的に不偏ではあるが，再び，一致性をもたない事が解る。

したがって，一致性のある推定量を得る為には平滑化手法が要求されるのである。 Dスペクトラムの推定問題と同様にして，平滑化ピリオドグラム

$$\hat{g}_s(\omega_j) = \sum_{l=0}^{M} v(l)\, I(j \oplus l)$$

を考える。 ただし，$\{v(l),\ l=0,1,\cdots M\}$は $v(l) \geq 0,\ \sum_{l=0}^{M} v(l) = 1$ であるスペクトルウインドウである。 D-スペクトラム $f(\lambda)$ が十分滑らかであれば，それに対応するWスペクトラム $g(\omega)$ も滑らかであり，また，FWT $D(j)$の相関 $V(j,k)$ も無視できるため，

$$E\{\hat{g}_s(\omega_j)\} \fallingdotseq g(\omega_j),$$

$$Var\{\hat{g}_s(\omega_j)\} \fallingdotseq 2\left(\sum_{l=0}^{M} v(l)^2\right) \cdot g(\omega_j)^2$$

となり，$N \to \infty$ とともに，$\sum_{l=0}^{M} v(l)^2 \to 0$ となるように $v(l),\ l=0,1,\cdots M$ を選べば，Wスペクトラム $g(\omega)$ の推定量 $\hat{g}_s(\omega)$ の一致性が得られる。

平滑化ピリオドグラム $\hat{g}_s(\omega)$ は，また別の表現として，

$$\hat{g}_s(\omega) = \sum_{l=0}^{N-1} \lambda(l)\, C(l)\, W(l,\omega)$$

の形で書くことができる。 ここに

$$C(l) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} X(t) X(t \oplus l)$$

はラグ l の標本Dyadic自己共分散であり，$\{\lambda(l)\}_{l=0}^{N-1}$ は

$$\lambda(l) = \sum_{j=0}^{M} v(j)\, W(j, \omega_l)$$

で決定されるラグ・ウインドウである。特に $\lambda(l)\equiv 1$, $l=0,1,\ldots,N-1$, のときは $\hat{g}_s(j)\equiv\hat{g}_s(\omega_j)=I(j)$ となる。

分散安定化のため、対数変換:

$$y_s(j)\equiv \ln(\hat{g}_s(\omega_j)),\quad j=0,1,2,\ldots,N-1$$

を行えば,

$$E\{y_s(j)\}\fallingdotseq \ln(g(\omega_j)),$$
$$Var\{y_s(j)\}\approx 2\sum_{l=0}^{M}v(l)^2$$

となることから, 対数Wスペクトラム $\ln(g(\omega_j))$ の $100\alpha\%$ 信頼区間として,

$$\left[\, y_s(j)-k\sqrt{2\sum^{M}v(l)^2},\qquad y_s(j)+k\sqrt{2\sum^{M}v(l)^2}\,\right]$$

を採用できることが解る。ただし, $k\approx(1-\alpha)^{-1/2}$ である。

[IV] Wスペクトラムの Parametric 推定。 時系列データ $\{X(t),\ t=0,1,\ldots,N-1\}$ に p-次の DAR-モデル

$$X(t)=\sum_{l=1}^{p}a(l)X(t\oplus l)+\varepsilon(t) \qquad \cdots(4,\ 1)$$

を当てはめる。 $\{\varepsilon(t),\ t=0,1,2\ldots\}$ は残差項で, その分散を σ^2 とする。 もし, 関数 $\varphi(\omega)=1-\sum_{l=1}^{p}a(l)W(l,\omega)$ が, ゼロでなければ, $X(t)$ は $M-1$ 次の Dyadic MA モデルとして,

$$X(t)=\sum_{j=0}^{M-1}b(j)\varepsilon(t\oplus j),$$

と書くことができる。(Nagai (1980)), ただし, $M=2^r$,

$2^{\nu-1} \leq p \leq 2^{\nu}-1 = M-1$ である。

DMA 係数 $\{b(\ell),\ \ell=0,1,2\cdots M-1\}$ は次の関係式：

$$\begin{pmatrix} b(0) \\ b(1) \\ \vdots \\ b(M-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \mathbb{H}_M \begin{pmatrix} \varphi(\omega_0)^{-1} \\ \varphi(\omega_1)^{-1} \\ \vdots \\ \varphi(\omega_{M-1})^{-1} \end{pmatrix}, \quad \cdots (4,2)$$

によって決定できる。　この DAR モデルに対応する W スペクトラムは

$$g(\omega) = \sigma^2 / [\varphi(\omega)]^2$$
$$= \sigma^2 [\sum_{j=0}^{M-1} b(j) W(j,\omega)]^2$$

である。　したがって、時系列データ $\{X(t),\ t=0,1,\ldots N-1\}$ から、残差値の分散 σ^2，および DAR 係数 $\{a(\ell)\}_{\ell=0}^{p}$ あるいは DMA 係数 $\{b(j)\}_{j=0}^{M-1}$ を推定することができれば、それらを用いて W スペクトラムの推定値

$$\hat{g}_d(\omega) = \hat{\sigma}^2 / [1 - \sum_{\ell=1}^{p} \hat{a}(\ell) W(\ell,\omega)]^2$$
$$= \hat{\sigma}^2 [\sum_{j=0}^{M-1} \hat{b}(j) W(j,\omega)]^2$$

を計算することができる。　ここに $\hat{\sigma}^2$，$\hat{a}(\ell)$，$\hat{b}(j)$ はそれぞれ σ^2，$a(\ell)$，$b(j)$ の推定値である。

ところで，(4,1) 式の両辺に $X(t\oplus k)$ を掛けて期待値をとれば，DAR 係数 $\{a(\ell)\}_{\ell=1}^{p}$ と DMA 係数 $\{b(j)\}_{j=0}^{M-1}$ および，分散 σ^2 の決定方程式：

$$R(k)=\sigma^2\cdot b(k)+\sum_{l=1}^{p}a(l)R(l\oplus k),\quad k=0,1,\ldots p \quad \cdots(4,3)$$

が得られる。もし，右辺の第一項が無ければ，ARモデルにおけるYule-Walkerの方程式と同等であるが，一般に$b(k)\neq 0$であり，$b(k)$はまた，DAR係数$\{a(l)\}_{l=1}^{p}$の非線形関数であるので式(4，3)は直接解く事ができない。　さて，標本Dyadic自己共分散$C(l)$を用いてDAR係数$\{a(l)\}_{l=1}^{p}$，DMA係数$\{b(j)\}_{j=0}^{M-1}$および分散σ^2を推定する方法を考える。（4，3）式の中の$R(l)$を$C(l)$でおき代えると，

$$C(k)=\sigma^2 b(k)+\sum_{l=1}^{p}a(l)\,C(l\oplus k),\quad k=0,1\ldots p \quad \cdots(4,4)$$

となる。

まず最初に，(4，4)式において，$b(k)=0$，$k=0,1\ldots p$とおくことにより，すなわち，(4，4)式を

$$C(k)\doteqdot\sum_{l=1}^{p}a(l)\,C(l\oplus k),\qquad k=1,2\ldots p$$

として，これからDAR係数の初期推定値$\{\hat{a}_0(l),\ l=1,2\ldots p\}$を求める。次に，関係式(4，2)よりDMA係数$\{\hat{b}(j),\ j=0,1,\ldots,M-1\}$を計算する。残差項の分散$\sigma^2$の推定値は

$$\hat{\sigma}^2=\Big[C(0)-\sum_{l=1}^{p}\hat{a}(l)\,C(l)\Big]\Big/\hat{b}(0)$$

によって得られる。更に，これらを用いて，

$$C^{*}(k)=C(k)-\hat{\sigma}^2\cdot\hat{b}(k),\qquad k=1,2\ldots p,$$

と$C(k)$を修正することによって，(4，4)式の近似として

修正された Yule-Walker 方程式

$$\sum_{l=1}^{p} a(l)\, C(l \oplus k) = C^{*}(k), \qquad k=1,2\ldots p$$

を考える。　これを解くことによって改良されたDAR係数の推定値 $\{\hat{a}(l),\ l=1,2\ldots p\}$ が得られる。

以下、同様の計算を反復実行し，DAR係数の推定値 $\{\hat{a}(l),\ l=1,2\ldots p\}$，DMA係数の推定値 $\{\hat{b}(j),\ j=0,1\ldots M-1\}$，および $\hat{\sigma}^2$ を求めることができる。

これらを用いて，時系列 $\{X(t),\ t=0,1,2\ldots N-1\}$ の DAR モデル当てはめを行うことによって得られたWスペクトラム $g(\omega)$ の Parametric 推定値

$$\hat{g}_d(\omega) = \hat{\sigma}^2 \Big[\hat{b}(0) + \sum_{j=1}^{M-1} \hat{b}(j)\, W(j,\omega)\Big]^2$$

$$= \hat{\sigma}^2 \Big/ \Big[1 - \sum_{l=1}^{p} \hat{a}(l)\, W(l,\omega)\Big]^2$$

を計算することができる。　当てはめの次数決定としては $\hat{\sigma}^2$ を用いて，AIC 基準，

$$AIC(p) = N \log(\hat{\sigma}^2) + 2p$$

を最小にする p を採用すればよい。

[V]、まとめ。　定常時系列に対するWスペクトラム解析についての考察を行った。　それは、Dスペクトラムの推定問題とWスペクトラムの推定問題は全く平行的であるこ

と、すなわちピリオドグラム，自己共分散を，Wピリオドグラム，Dyadic自己共分散で，また算術加法を二進加法で置き代えればよいという事が解った。 スペクトラム推定の対数変換や信頼区間の構成等も，ほゞ同様である。

しかし，WスペクトラムをDARモデル当てはめを行うことによって推定する時は，Yule-Walker方程式に対応する方程式が，未知パラメータの非線形方程式となるため，大変繁雑な反復計算を必要とする。 また，次数の異るDARモデルの係数を推定するとき，Durbinの反復式が適用できない為，その都度，逆行列の計算が行はれる。 従って定常系列にARモデルの当てはめで得られる利点は，DARモデル当てはめにおいては得られない。

定常過程においてはそのPスペクトル $f(\lambda)$ とWスペクトル $g(\omega)$ との形状はかなり類似している。 しかし，Pスペクトラム $f(\lambda)$ は単峰であるにも拘らず，Wスペクトラム $g(\omega)$ は双峰となる例があるように，WスペクトラムにはPスペクトラムと異った特徴が現れることもあり，$f(\lambda)$ と $g(\omega)$ との関係については今後，更に詳しい検討が必要と思はれる。

文　　献

(1) Hannan, E. J. (1970); Multiple Time Series.
J. Wiley

(2) Harmuth, H. (1972); Transmission of Information by orthogonal functions,
Berlin, Springer-V.

(3) Morettin, P. A. (1973): Stochastic dyadic Systems, Symp. Appl. Walsh. functions
290-293. Washington, D.C.

(4) 〃 (1976): Estimation of the Walsh spectrum.
IEEE. Trans. on Information Theory
106-107

(5) Nagai, T. (1976): Dyadic stationary processes and their spectral representations,
Bull. Math. Statist. 19, 65-73

(6) 〃 (1976): On finite Walsh Transforms of a dyadic stationary time series.
大分大学 工学部 研究報告 63-66.

(7) 〃 (1980): On finite parametric linear models of dyadic stationary

processes.
Bull. Math. Statist. 20, 45-53.